第1章　平面向量及其应用

1.1　向量

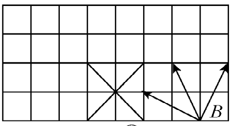
·题型诀·

1-1. ①②　【解析】对于①,物理学中的作用力与反作用力大小相等,方向相反,是一对相反向量,故正确. 对于②,相等向量的模相等,方向相同,故正确. 对于③,平面直角坐标系上的 x 轴,y 轴只有方向,没有大小,不是向量,故错误. 对于④,若两个向量相等,则表示两个向量的有向线段可以通过平移使起点和终点分别重合,但表示两个向量的有向线段不一定起点和终点分别重合,故错误. 综上,正确结论的序号是①②.

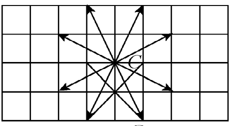
2-1.【解】根据规则,画出符合要求的所有向量.

马在 B 处走了"一步"的情况如图①所示;

马在 C 处走了"一步"的情况如图②所示.

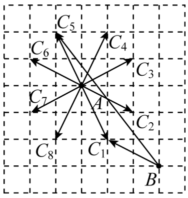


图①



图②

2-2.【解】(1)画出所有的向量 $\overrightarrow{AC}$,如图所示.



(2)由(1)所画的图知,

①当点 C 位于点 C_1 或 C_2 时,$|\overrightarrow{BC}|$ 取得最小值 $\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$;

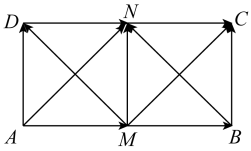
②当点 C 位于点 C_5 或 C_6 时,$|\overrightarrow{BC}|$ 取得最大值 $\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41}$.

所以 $|\overrightarrow{BC}|$ 的最大值为 $\sqrt{41}$,最小值为 $\sqrt{5}$.

3-1. B　【解析】两向量相等要求模相

等,方向相同,因此 $\overrightarrow{AR}$ 与 $\overrightarrow{RC}$ 都是和 $\overrightarrow{PQ}$ 相等的向量.

3-2. D 【解析】如图所示,由已知得 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{BN}$,有 12 对相等向量;改变其方向,又有 12 对相等向量. 故共有 24 对相等向量.



1.2 向量的加法

· 易错记 ·

1-1. C 【解析】由于 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$,故四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 根据向量加法和减法的几何意义可知,该平行四边形的对角线相等,故四边形 $ABCD$ 为矩形.

2-1. A 【解析】①当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不同向或反向时成立;②当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 时成立;③当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反,且 $|\boldsymbol{a}|\geqslant|\boldsymbol{b}|$ 时成立;④当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时成立.

· 题型诀 ·

1-1. B 【解析】$\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{BO})+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AB}$,故选 B.

1-2. 0 【解析】依题意,$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$,

所以 $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA})+(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DA})=\boldsymbol{0}$.

2-1. A 【解析】因为 $\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{CB}$,所以 $\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}$,故选 A.

2-2. B 【解析】由 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ 得 $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$,所以 $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$,

所以 $BA/\!/CD$,且 $BA=CD$,

所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形. 故选 B.

2-3. BCD 【解析】对于 A,$\overrightarrow{AB}-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AB}$,A 错误;

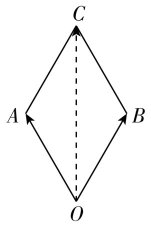
对于 B,$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{0}$,B 正确;

对于 C,$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{0}$,C 正确;

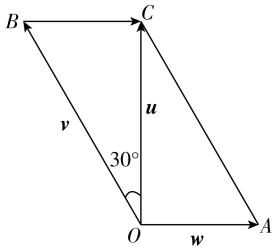
对于 D,$\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PN}=\boldsymbol{0}$,D 正确. 故选 BCD.

3-1. A 【解析】(提示:用向量 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 表示两只胳膊的拉力,它们的合力与重力大小相等,求出 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|$,再化为体重即可得解)如图,$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=300$, $\angle AOB=60°$,以 OA, OB 为邻边作平行四边形 $OACB$,则四边形 $OACB$ 是菱形. 连接 OC,因为 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,所以 $|\overrightarrow{OC}|=2|\overrightarrow{OA}|\cdot\cos 30°=300\sqrt{3}$,

因此该学生体重为 $\frac{300\sqrt{3}}{10}\approx\frac{300\times1.732}{10}\approx 52$(kg). 故选 A.



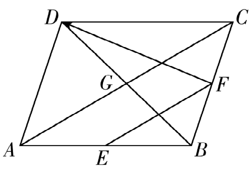
3-2. 【解】(1)如图,$\boldsymbol{u}$ 是垂直到达河对岸方向的速度,$\boldsymbol{v}$ 是与河岸成 $60°$ 角的静水中的船速,则 $\boldsymbol{v}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 的夹角为 $30°$. 由题意知,$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{BC}$ 构成一个直角三角形,其中 $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{v}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{u}$, $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{w}$,由向量加法的三角形法则知,$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,即 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}+\boldsymbol{v}$.



(2)因为 $|\overrightarrow{OB}|=|\boldsymbol{v}|=10$ km/h,而 $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{OB}|\sin 30°=10\times\frac{1}{2}=5$(km/h),所以这条河河水的流速为 5 km/h,方向为顺着河岸向下.

4-1. 【解】(1)由条件知 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{AD}|$,即 $AB=AD$,又四边形 $ABCD$ 是平行四边形,故四边形 $ABCD$ 是菱形.

(2)由平行四边形及三角形中位线的性质可知 $\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{EF}$. 所以 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{FD}$. 作出向量 $\overrightarrow{FD}$ 如图所示.



5-1. C　【解析】由向量三角不等式可知，只有当非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时，

才有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，故 A，D 正确；

只有当非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 方向相反时，

才有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||$，$|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，故 B 正确，C 错误.

故选 C.

5-2. $[1,3]$　【解析】由两向量和与差的三角不等式，可得 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\geqslant||\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}||=1$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向时，等号成立，

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=3$，当且仅当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向时，等号成立，

综上所述，$1\leqslant|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant3$.

1.3　向量的数乘

· 易错记 ·

1-1. AB　【解析】对于 A，向量不能比较大小，故 A 错误；

对于 B，零向量与任意向量平行，且零向量的方向是任意的，故 B 错误；

对于 C，因为 $\boldsymbol{b}$ 不为零向量，所以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 平行，故 C 正确；

对于 D，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零向量，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，所以 D 正确.

故选 AB.

2-1. B　【解析】$\because\ \overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+6\boldsymbol{b}=2(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})=2\overrightarrow{AB}$，且 $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{AB}$ 有公共点 B，$\therefore A,B,D$ 三点共线. 故选 B.

2-2. C　【解析】若 A,B,C 三点共线，则 $\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{AC}$，则有 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC}\ (\lambda\in\mathbf{R})$，即 $\boldsymbol{a}+m\boldsymbol{b}=n\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

因为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，所以 $\begin{cases}1=n\lambda,\\ m=\lambda,\end{cases}$ 即 $mn=1$. 故选 C.

· 题型诀 ·

1-1. B　【解析】根据向量运算公式可知，$10(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=10\boldsymbol{a}+10\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=9\boldsymbol{a}+11\boldsymbol{b}$. 故选 B.

1-2. $-5\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$　【解析】原式 $=5\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}-3\boldsymbol{a}+9\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}-7\boldsymbol{a}=-5\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{c}$.

1-3.【解】(提示：将 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 看成未知数，用

方程组求解）由方程组$\begin{cases}2x+3y=a,\\3x-2y=b,\end{cases}$解得

$x=\frac{2}{13}a+\frac{3}{13}b,y=\frac{3}{13}a-\frac{2}{13}b.$

2-1. A 【解析】因为点 G 满足 $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$，所以 G 为 $\triangle ABC$ 的重心，所以 $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$.

又因为 $\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AM}$，

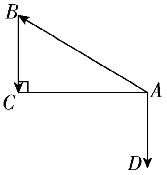
所以 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{BA}-\frac{1}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}=\frac{8}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{9}(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{7}{9}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}.$

故选 A.

3-1. B 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{b}=-2\boldsymbol{e}_1+3\boldsymbol{e}_2$，所以 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2$. 又 $4\boldsymbol{e}_1+10\boldsymbol{e}_2=2(2\boldsymbol{e}_1+5\boldsymbol{e}_2)$，所以 B 项与 $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线. 故选 B.

4-1. B 【解析】因为 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的起点相同，所以 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ 的夹角即为角 A，大小是 $\frac{\pi}{3}$. 故选 B.

4-2. C 【解析】如图，作向量 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$，则 $\angle BAD$ 是 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的夹角.



在 $\triangle ABC$ 中，因为 $C=90°,BC=\frac{1}{2}AB$，

所以 $\angle ABC=60°$，所以 $\angle BAD=120°$. 故选 C.

5-1. 【证明】因为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})+(2\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BC}$，且 A,B,C,D 四点不共线，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

6-1. A 【解析】方法一（利用共线向量基本定理）：因为$3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$，

所以 $3\overrightarrow{OB}-3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，即 $3(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$，

所以 $3\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CA}$，所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{CA}$ 共线，且有公共点 A，所以 A,B,C 三点共线.

方法二（利用共线向量基本定理性质）：

因为$3\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{OC}=-3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OA}$，

由于$-3+4=1$，所以 A,B,C 三点共线.

6-2.【证明】因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，所以 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. 因为 N 是 BD 上靠近点 B 的三等分点，

所以 $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$.

因为在平行四边形 $ABCD$ 中，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，

所以 $\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BN}-\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})-\boldsymbol{b}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$. ①

因为 M 为 AB 的中点，所以 $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$，所以 $\overrightarrow{CM}=-\overrightarrow{MC}=-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC})=-\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. ②

由①②可得 $\overrightarrow{CM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CN}$.

由共线向量基本定理知 $\overrightarrow{CM}/\!/\overrightarrow{CN}$. 又因为 $\overrightarrow{CM}$ 与 $\overrightarrow{CN}$ 有公共点 C，所以 M,N,C 三点共线.

7-1. A 【解析】由题意可得，$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{CA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. 又 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，所以 $t=\frac{1}{3}$. 故选 A.

7-2. -4 【解析】由题意知，$k\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}=\lambda(8\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})(\lambda<0)$.

所以 $(k-8\lambda)\boldsymbol{a}+(2-\lambda k)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是两个不共线的非零向量，

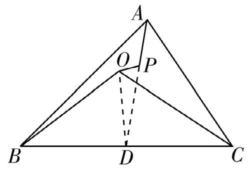
所以 $\begin{cases}k-8\lambda=0,\\2-\lambda k=0,\end{cases}$ 则 $\lambda=-\frac{1}{2}$，$k=-4$.

7-3.【解】(1) 由题意知，A 是 BC 的中点，且 $\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$，由平行四边形法则，得 $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}$，所以 $\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$.

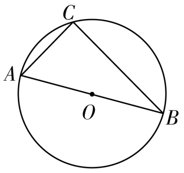
(2) 因为 $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OE}=(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\lambda\boldsymbol{a}=(2-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{DC}=2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{EC}/\!/\overrightarrow{DC}$，所以 $\overrightarrow{EC}=\mu\overrightarrow{DC}$，即 $(2-\lambda)\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\mu\left(2\boldsymbol{a}-\frac{5}{3}\boldsymbol{b}\right)$，所

以$\begin{cases}2-\lambda=2\mu,\\-1=-\dfrac{5}{3}\mu,\end{cases}$解得$\begin{cases}\mu=\dfrac{3}{5},\\\lambda=\dfrac{4}{5},\end{cases}$所以$\lambda=\dfrac{4}{5}$.

8-1. C 【解析】如图所示,设线段 BC 的中点为 D,连接 OD,PD,则有 $\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$,因此由已知得 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\lambda\overrightarrow{AP}$,即 $\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OD}=\lambda\overrightarrow{AP}$,于是 $\overrightarrow{DP}=\lambda\overrightarrow{AP}$,则 $\overrightarrow{DP}$ 与 $\overrightarrow{AP}$ 共线且有公共点 P,所以 A,P,D 三点共线,因此点 P 在直线 AD 上. 又 AD 是$\triangle ABC$ 的 BC 边上的中线,因此点 P 的轨迹一定通过$\triangle ABC$ 的重心. 故选 C.



9-1. A 【解析】若 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{OB}(\lambda\in\mathbf{R})$,则 A,O,B 三点共线,如图,则 $C=\dfrac{\pi}{2}$,故$\triangle ABC$ 是以 C 为直角的直角三角形,故充分性成立. 当$\triangle ABC$ 为直角三角形时,C 不一定是直角,故 A,O,B 三点不一定共线,即 $\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{OB}$ 不一定成立,故必要性不成立. 综上所述,"$\overrightarrow{AO}=\lambda\overrightarrow{OB}(\lambda\in\mathbf{R})$"是"$\triangle ABC$ 为直角三角形"的充分不必要条件.



10-1. B 【解析】由 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AO}$ 得 $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}$,即 $\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$,$\therefore$ O 为边 BC 的中点. $\because$ $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O,半径为 1,$\therefore$ $\triangle ABC$ 是以 BC 为斜边的直角三角形,$\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$,$BC=2$. 又 $|\overrightarrow{AO}|=|\overrightarrow{AC}|$, $\therefore AC=1$, $AB=\sqrt{3}$, $\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.

1.4 向量的分解与坐标表示

1.4.1 向量分解及坐标表示

·题型诀·

1-1. B 【解析】因为 B 中 $4\boldsymbol{e}_2-6\boldsymbol{e}_1=$

$-2(3\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2)$，所以两向量为共线向量，不能作为一组基.

1-2. D 【解析】对于①，因为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 不共线，所以可以作为平面的一组基；

对于②，因为 $\overrightarrow{AD}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 共线，所以不可以作为平面的一组基；

对于③，因为 $\overrightarrow{OA}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 共线，所以不可以作为平面的一组基；

对于④，因为 $\overrightarrow{CA}$ 与 $\overrightarrow{DC}$ 不共线，所以可以作为平面的一组基.

由分析可得①④中的向量组可作为平面的一组基. 故选 D.

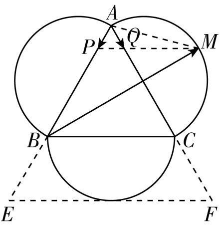
2-1. B 【解析】由题意得，$\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{FB}=\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{9}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})$，

所以 $\frac{13}{9}\overrightarrow{DE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$，即 $\overrightarrow{DE}=\frac{6}{13}\overrightarrow{DC}+\frac{4}{13}\overrightarrow{DA}=\frac{4}{13}\boldsymbol{m}+\frac{6}{13}\boldsymbol{n}$，

故选 B.

2-2. $\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$ 【解析】因为 $CF=2FD$，$CE=3EB$，所以 $\overrightarrow{CF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CB}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$. 又 G 为 EF 的中点，所以 $\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{CG}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CE})=-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}\right)=\frac{3}{8}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$.

3-1. B 【解析】如图所示，过点 M 作 $MP//BC$ 交直线 AB,AC 于 P,Q 两点，



连接 AM，则 $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AP}+y\overrightarrow{AQ}$，可得 $x+y=1$.

设 $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}(k\neq1$ 且 $k\neq0)$，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AC}(k\neq1$ 且 $k\neq0)$，则 $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=(kx-1)\overrightarrow{AB}+ky\overrightarrow{AC}$.

因为 $\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$，所以 $\lambda+\mu=kx-1+ky=$

$k-1$,

由图可知,当 PM 与半圆 BC 相切时,k 最大,

又由 $AB=2$,$BE=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,可得 $AE=2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{6+2\sqrt{3}}{3}$,

所以 $k_{\max}=\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$,所以 $\lambda+\mu$ 的最大值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3-2.【解】(1)由已知得 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{ED}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

(2)设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$,

则 $\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{1}{2}\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{EM}=\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}$,

$\overrightarrow{AP}=\mu\boldsymbol{a}$,

连接 AM(图略),则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM}=\dfrac{1}{6}\boldsymbol{b}+\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{b}=\dfrac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}+\left(\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{1}{6}\right)\boldsymbol{b}$.

由于 P,M,D 三点共线,

设 $\overrightarrow{DM}=k\overrightarrow{DP}(k\in\mathbf{R})$,

则 $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AP}+(1-k)\overrightarrow{AD}=k\mu\boldsymbol{a}+(1-k)\boldsymbol{b}$,

所以$\begin{cases}k\mu=\dfrac{\lambda}{2},\\1-k=\dfrac{\lambda}{2}+\dfrac{1}{6},\end{cases}$所以 $\mu=\dfrac{3\lambda}{5-3\lambda}$.

因为 P 是线段 AG 上(不含端点)的动点,

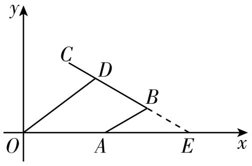
所以 $\mu=\dfrac{3\lambda}{5-3\lambda}\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$,

所以 $\lambda\in\left(0,\dfrac{5}{9}\right)$,

所以 $3\lambda^2+\dfrac{2}{1+\mu}=3\lambda^2-\dfrac{6}{5}\lambda+2=3\left(\lambda-\dfrac{1}{5}\right)^2+\dfrac{47}{25}$,

当 $\lambda\in\left(0,\dfrac{5}{9}\right)$ 时,$3\lambda^2+\dfrac{2}{1+\mu}$的取值范围为$\left[\dfrac{47}{25},\dfrac{61}{27}\right)$.

4-1. $\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{7}{3}\right)$ 【解析】如图,延长 CB 交 x 轴于 E.



则 $\angle BAE=180^\circ-150^\circ=30^\circ$, $\angle AEB=\angle ABC-\angle BAE=30^\circ$, $\angle BEx=150^\circ$.

由题意 $\overrightarrow{OA}=(4,0)$, $\overrightarrow{AB}=2(\cos 30^\circ,\sin 30^\circ)=(\sqrt{3},1)$, $\overrightarrow{BC}=4(\cos 150^\circ,\sin 150^\circ)=(-2\sqrt{3},2)$, 又 $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$, 所以 $\overrightarrow{BD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}=\left(-\dfrac{4\sqrt{3}}{3},\dfrac{4}{3}\right)$, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{7}{3}\right)$, 所以点 D 的坐标为$\left(4-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

4-2. 【解】设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2)$, $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2)$,

则 $a_1=|\boldsymbol{a}|\cos 45^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$,

$a_2=|\boldsymbol{a}|\sin 45^\circ=2\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$;

$b_1=|\boldsymbol{b}|\cos 120^\circ=3\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{3}{2}$,

$b_2=|\boldsymbol{b}|\sin 120^\circ=3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$;

$c_1=|\boldsymbol{c}|\cos(-30^\circ)=4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$,

$c_2=|\boldsymbol{c}|\sin(-30^\circ)=4\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-2$.

所以 $\boldsymbol{a}=(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $\boldsymbol{b}=\left(-\dfrac{3}{2},\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $\boldsymbol{c}=(2\sqrt{3},-2)$.

5-1. D 【解析】依题意,设 $\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BC}$($\lambda$ 为实数),则 $1<\lambda<\dfrac{4}{3}$. $\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$. 因为 $\overrightarrow{AO}=x\overrightarrow{AB}+(1-x)\overrightarrow{AC}$, 且 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 不共线,所以 $x=1-\lambda\in\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$, 即 x 的取值范围是$\left(-\dfrac{1}{3},0\right)$.

5-2. $\left(\dfrac{10}{3},+\infty\right)$ 【解析】由题可知,

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$,设 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AD}(0<m<1)$,

则 $\overrightarrow{AE}=m\left(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right)=m\left[\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})\right]=\frac{2}{3}m\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}m\overrightarrow{AC}$.

又因为 $\overrightarrow{AE}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$,

所以 $\lambda=\frac{2}{3}m,\mu=\frac{1}{3}m$,

所以$\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{\mu}=\frac{m}{3}+\frac{3}{m}(0<m<1)$.

设 $f(m)=\frac{m}{3}+\frac{3}{m}(m\neq 0)$,

由对勾函数的性质可知,$f(m)$在$(0,1)$上单调递减,

则 $f(m)>f(1)=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$,

所以$\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{\mu}$的取值范围是$\left(\frac{10}{3},+\infty\right)$.

5-3.【解】(1)$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

因为 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,所以 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$.

由平面向量基本定理可得 $x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$,

所以$x-y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

(2)因为 F 为线段 AB 的中点,

所以 $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$.

因为直线 CF 与 AD 相交于点 M,所以存在实数 λ,μ,使 $\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CF}(0<\lambda<1)$,
$\overrightarrow{AM}=\mu\overrightarrow{AD}(0<\mu<1)$,

所以 $\overrightarrow{CM}=\lambda\left(-\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}\right)$,

因此 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}=(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}$.

又 $\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

所以 $\overrightarrow{AM}=\mu\left(\frac{2}{3}\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\boldsymbol{b}\right)=\frac{2}{3}\mu\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{b}$.

因此$(1-\lambda)\boldsymbol{b}+\frac{\lambda}{2}\boldsymbol{a}=\frac{2}{3}\mu\boldsymbol{a}+\frac{1}{3}\mu\boldsymbol{b}$,

所以$\begin{cases}1-\lambda=\frac{1}{3}\mu,\\ \frac{\lambda}{2}=\frac{2}{3}\mu,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}\lambda=\frac{4}{5},\\ \mu=\frac{3}{5},\end{cases}$

所以 $\overrightarrow{CM}=\frac{2}{5}\boldsymbol{a}-\frac{4}{5}\boldsymbol{b}$.

6-1. (1)【解】由题可知 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$.

(2)【证明】$\because \overrightarrow{AG}=\frac{3}{4}\boldsymbol{a}+\frac{2}{3}\boldsymbol{b}$,

$\therefore \overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}$,

$\therefore \overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{2}{3}\boldsymbol{b}=2\overrightarrow{EG}$, $\therefore \overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}$ 共线.

又 $\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EG}$ 有公共点 E,

$\therefore E,G,F$ 三点共线.

1.4.2 向量线性运算的坐标表示

·题型诀·

1-1. D 【解析】$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA})=(2,1)$,故选 D.

1-2. B 【解析】因为 $A(1,2)$,$B(3,5)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(2,3)$,向量是可以平移的,因为向量 $\overrightarrow{AB}$ 平移后仍是 $\overrightarrow{AB}$,所以向量 $\overrightarrow{AB}$ 按向量 $\boldsymbol{a}=(-1,-1)$ 的方向平移后得到 $\overrightarrow{A'B'}=(2,3)$,故选 B.

1-3. $(2,19)$ 【解析】依题意得 $\overrightarrow{AB}=(3,1)$,$\overrightarrow{AC}=(-1,4)$,所以 $2\overrightarrow{AB}=(6,2)$,$4\overrightarrow{AC}=(-4,16)$,故 $2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}=(2,18)$.

设点 D 的坐标为 (x,y),则 $\overrightarrow{AD}=(x,y-1)$.

因为 $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AC}$,所以 $x=2,y-1=18$,

所以 $x=2,y=19$,

故点 D 的坐标为 $(2,19)$.

2-1. (1)【解】设 E 点的坐标为 (x_1,y_1),F 点的坐标为 (x_2,y_2),

由 $\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AC}$ 得 $(x_1+1,y_1)=3(2,2)$,所以 $x_1=5,y_1=6$,故 $E(5,6)$.

由 $\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{BC}$ 得 $(x_2-3,y_2+1)=3(-2,3)$,所以 $x_2=-3,y_2=8$,故 $F(-3,8)$. 所以 $\overrightarrow{EF}=(-8,2)$.

(2)【证明】因为 $A(-1,0)$,$B(3,-1)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(4,-1)$. 又 $\overrightarrow{EF}=(-8,2)$,满足

$4\times2-(-1)\times(-8)=0$,所以$\overrightarrow{EF}//\overrightarrow{AB}$.

3-1. A 【解析】因为向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 平行,

所以 $\sin\alpha-2\cos\alpha=0$,即 $\tan\alpha=2$,

所以 $\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha=-2$.

故选 A.

3-2. $\left\{a \,\middle|\, a\neq\frac{1}{11}\right\}$ 【解析】因为 $A(a+2,a)$,$B(1,-a)$,$C(a-4,a-1)$,所以 $\overrightarrow{AB}=(-a-1,-2a)$,$\overrightarrow{BC}=(a-5,2a-1)$.

因为 A,B,C 三点构成一个三角形,所以 $\overrightarrow{AB}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 不共线,

所以 $(-a-1)(2a-1)\neq-2a(a-5)$,解得 $a\neq\frac{1}{11}$,

所以实数 a 的取值范围为$\left\{a \,\middle|\, a\neq\frac{1}{11}\right\}$.

3-3. 【解】(1)由 $\boldsymbol{c}=m\boldsymbol{a}+n\boldsymbol{b}$,得 $(4,3)=m(1,2)+n(-1,3)$,

则有$\begin{cases}4=m-n,\\3=2m+3n,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=3,\\n=-1.\end{cases}$

(2)$\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c}=(1+4k,2+3k)$,$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=(-2,1)$,

由$(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{c})//(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})$,得 $1+4k+2(2+3k)=0$,解得 $k=-\frac{1}{2}$.

4-1. A 【解析】设 $P(x,y)$,则 $\overrightarrow{PN}=(10-x,-2-y)$,$\overrightarrow{PM}=(-2-x,7-y)$. 因为 $\overrightarrow{PN}=-2\overrightarrow{PM}$,

所以$\begin{cases}10-x=-2(-2-x),\\-2-y=-2(7-y),\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=2,\\y=4,\end{cases}$ 所以点 P 的坐标为$(2,4)$.

故选 A.

4-2. AD 【解析】由题意可得 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ 或 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,设 $P(x,y)$,

则 $\overrightarrow{AP}=(x-3,y+4)$,$\overrightarrow{AB}=(-12,6)$.

若 $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,可得$\begin{cases}x-3=\frac{1}{3}\times(-12),\\y+4=\frac{1}{3}\times6,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-1,\\y=-2,\end{cases}$

即 $P(-1,-2)$;

若 $\overrightarrow{AP}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$,可得

$\begin{cases}x-3=-\dfrac{1}{3}\times(-12),\\ y+4=-\dfrac{1}{3}\times 6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=7,\\ y=-6,\end{cases}$

即 $P(7,-6)$，

故点 P 坐标可为 $(-1,-2)$ 或 $(7,-6)$.

故选 AD.

4-3.【解】方法一(向量相等法)：

由题意得，$\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. 设点 C 的坐标为 (x,y)，则 $\overrightarrow{AC}=(x-2,y-3)$.

因为 $\overrightarrow{AB}=(6,-6)$，

所以 $\begin{cases}x-2=\dfrac{1}{3}\times 6,\\ y-3=\dfrac{1}{3}\times(-6),\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=4,\\ y=1.\end{cases}$

所以点 C 的坐标为 $(4,1)$.

由 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$，同理可得，点 D 的坐标为 $(6,-1)$.

所以 $\overrightarrow{PC}=(3,0)$，$\overrightarrow{PD}=(5,-2)$.

方法二(定比分点公式法)：

由题意，得点 C,D 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比分别是 $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$，$\lambda_2=2$.

当 $\lambda_1=\dfrac{1}{2}$ 时，设 $C(x,y)$，利用定比分点坐标公式可得，

$$x=\frac{2+\frac{1}{2}\times 8}{1+\frac{1}{2}}=4,\quad y=\frac{3+\frac{1}{2}\times(-3)}{1+\frac{1}{2}}=1.$$

所以点 C 的坐标为 $(4,1)$，同理可得点 D 的坐标为 $(6,-1)$.

所以 $\overrightarrow{PC}=(4,1)-(1,1)=(3,0)$，$\overrightarrow{PD}=(6,-1)-(1,1)=(5,-2)$.

5-1.【解】(1)因为 $O(0,0)$，$A(1,2)$，$B(4,5)$，

所以 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{AB}=(3,3)$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=(1+3t,2+3t)$.

若点 P 在 x 轴上，只需 $2+3t=0$，$t=-\dfrac{2}{3}$；

若点 P 在第二、四象限角平分线上，则 $1+3t=-(2+3t)$，$t=-\dfrac{1}{2}$.

(2)由(1)知 $\overrightarrow{OA}=(1,2)$，$\overrightarrow{PB}=(3-3t,3-3t)$，

若四边形 $OABP$ 是平行四边形,

则 $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PB}$,

即 $\begin{cases}3-3t=1,\\3-3t=2,\end{cases}$ 此方程组无解.

所以四边形 $OABP$ 不可能为平行四边形.

1.5 向量的数量积

1.5.1 数量积的定义及计算

· 易错记 ·

1-1. 4 8 【解析】如图,取 BC 的中点 E,连接 AE.

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形,点 D 在 BC 的延长线上,且 $\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{CD}$,

所以 $AE\perp BC$, $BE=EC=CD=\frac{1}{2}AB$,

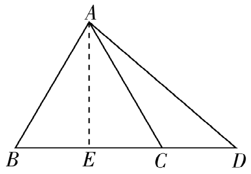
$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$,

所以在 $\mathrm{Rt}\triangle AED$ 中,$AE^2+ED^2=AD^2$,即

$\frac{3}{4}AB^2+AB^2=28$,

解得 $AB=4$.

所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}=4\times4\times\cos 60^\circ+4\times4\times\cos(180^\circ-60^\circ)+4\times4\times\cos 60^\circ=8$.



2-1. 【解】(1)因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2}$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 45°,

所以 $|\boldsymbol{a}|\cos 45^\circ=\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$. 所以 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 1.

(2)因为 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos 45^\circ+|2\boldsymbol{b}|^2}=\sqrt{2+4+4}=\sqrt{10}$,所以 $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

(3)因为 $(2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$ 与 $(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 的夹角是锐角,

所以 $(2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})>0$,且 $(2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b})$ 与 $(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$ 不能同向共线,

所以 $\lambda^2-7\lambda+6<0$, $2\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}\neq k(\lambda\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})$, $k>0$,解得 $1<\lambda<\sqrt{6}$ 或 $\sqrt{6}<\lambda<6$,所以实数

λ 的取值范围是$(1,\sqrt{6})\cup(\sqrt{6},6)$.

· 题型诀 ·

1-1.【解】(1)由平面向量数量积的定义可得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\frac{2\pi}{3}=4\times2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-4$.

(2)$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{b}^2$

$=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-2|\boldsymbol{b}|^2$

$=4^2+4-2\times2^2=12$.

1-2.【解】(1)因为在平行四边形 $ABCD$ 中,$DN=\frac{1}{2}DC$,所以 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

(2)因为 $AM=\frac{1}{3}AB$,所以 $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$. 又 $AD=1,AB=2,\angle DAB=60°$,所以 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$,所以 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{DM}=\left(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{AD}|^2-\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}-1-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}$.

2-1. -4 【解析】因为在$\triangle ABC$ 中,$AB=4,AC=5,BC=3$,所以 $AC^2=AB^2+BC^2$,即 $BC\perp AB$,所以 $\cos\angle BAC=\frac{4}{5}$,则 $\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\rangle=\cos(\pi-\angle BAC)=-\cos\angle BAC=-\frac{4}{5}$,所以 $\overrightarrow{AC}$ 在 $\overrightarrow{BA}$ 方向上的投影为$|\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}\rangle=5\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-4$.

2-2.【解】(1)因为$(3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2=19$,所以 $9\boldsymbol{a}^2-6\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=19$,

所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-1$,即$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-1$,

解得 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=-\frac{1}{2}$,

又 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$,故向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为$\frac{2\pi}{3}$.

(2)$|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}^2}{\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}}=\frac{-1-4}{\sqrt{\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2}}=-\frac{5}{\sqrt{7}}=-\frac{5\sqrt{7}}{7}$.

3-1. $-\sqrt{2}$　【解析】因为单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $45°$，所以 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=1$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1\times\cos45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，即 $\boldsymbol{a}^2+k\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，

即 $1+k\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$，解得 $k=-\sqrt{2}$.

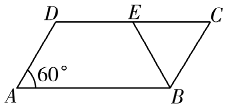
4-1. A　【解析】因为平面向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 互相垂直，模之比为 $2:1$，所以 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$ 且 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，得 $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$，又 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{5}$，则 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=\sqrt{5}$. 将 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 平方得 $\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=4\boldsymbol{a}^2-8\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2$，解得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3$. 又 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=16$，则 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=4$，设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|}=\dfrac{5+3}{\sqrt{5}\times4}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，故选 A.

4-2. A　【解析】设向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ，由 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=1$，得 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}^2=1$，即 $|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta-|\boldsymbol{b}|^2=1$，因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6}$，$|\boldsymbol{b}|=\sqrt{2}$，所以 $2\sqrt{3}\cos\theta-2=1$，解得 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又因为 $0°\leqslant\theta\leqslant180°$，所以 $\theta=30°$，即向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 夹角的大小为 $30°$. 故选 A.

4-3. $120°$　【解析】因为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{e}$ 方向上的投影为 -2，即 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=-2$，所以 $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=\dfrac{-2}{|\boldsymbol{a}|}=-\dfrac{1}{2}$，所以 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{e}\rangle=120°$.

5-1. D　【解析】因为 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，所以 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2=2$. 所以 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}^2=2+2\times2+4=10$，即 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

5-2. 2　【解析】



如图所示，由向量运算的三角形法则可得，$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. 因为 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AD}\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{AD}^2-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=1-\dfrac{1}{2}\times1\times|\overrightarrow{AB}|\times\cos60°=$

$\frac{1}{2}$,所以$|\overrightarrow{AB}|=2$.

6–1. A 【解析】$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$,所以由$(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}-2\overrightarrow{OA})=0$得$(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=0$,即$\overrightarrow{AB}^2=\overrightarrow{AC}^2$,所以$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|$,故$\triangle ABC$为等腰三角形.

6–2. D 【解析】由$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,可得$\angle BAC$的平分线垂直于$BC$,所以$AB=AC$.

又因为$\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\frac{1}{2}$,且$\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle\in(0,\pi)$,

所以$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$,所以$\triangle ABC$为等边三角形,故选D.

7–1. C 【解析】由题意可知,$\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AB}=(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

又因为$\triangle ABC$为等边三角形,$AB=2$,所以$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times2\times\frac{1}{2}=2$,

所以$\overrightarrow{BQ}\cdot\overrightarrow{CP}=[(1-\lambda)\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}]\cdot(\lambda\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})=\lambda(1-\lambda)\times2-4\lambda-4(1-\lambda)+2=-\frac{3}{2}$,解得$\lambda=\frac{1}{2}$,故选C.

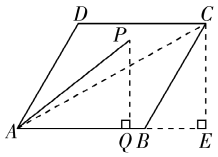
7–2. B 【解析】因为$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$的夹角为锐角,且$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$为互相垂直的单位向量.所以$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{i}+m\boldsymbol{j})=1-2m>0$,且$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$不共线,所以$m<\frac{1}{2}$.当$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$时,可得$m=-2$,所以实数$m$的取值范围是$(-\infty,-2)\cup\left(-2,\frac{1}{2}\right)$.故选B.

7–3. -8或5 【解析】由$3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}+7\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$,可得$7\boldsymbol{c}=-(3\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})$,即$49\boldsymbol{c}^2=9\boldsymbol{a}^2+\lambda^2\boldsymbol{b}^2+6\lambda\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.又$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为单位向量,所以$\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{c}^2=1$,所以$49=9+\lambda^2+6\lambda\cos\frac{\pi}{3}$,即$\lambda^2+3\lambda-40=0$,解得$\lambda=-8$或$\lambda=5$.

8–1. B 【解析】连接AC,如图.在菱形$ABCD$中,因为边长为1,$\angle DAB=60°$,所以$AC=\sqrt{3}$,且$\angle BAC=30°$,过点P作PQ

垂直于 AB 于点 Q,过点 C 作 CE 垂直于 AB 的延长线于点 E. 因为点 P 是边长为 1 的菱形 $ABCD$ 内一动点(包括边界),所以由平面向量数量积的几何意义,有 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AP}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\angle PAB=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AQ}|$,

所以当点 P 在点 C 处时,$|AQ|$ 最大,即 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 最大,此时 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\angle BAC=1\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$,所以 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}$ 的最大值为$\frac{3}{2}$. 故选 B.



8–2. B 【解析】根据题意得,$\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{OP}$ 方向上的投影为 $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=$

$$\frac{\lambda\overrightarrow{OA}^2+\mu\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\mu+4\mu^2}}=\frac{\lambda+\mu}{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\mu+4\mu^2}}.\quad ①$$

因为 $\lambda+2\mu=2$,所以 $\lambda=2-2\mu$,将其代入①得 $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{2-\mu}{\sqrt{4-4\mu+4\mu^2}}.\quad ②$

令 $2-\mu=t$,得 $\mu=2-t$,将其代入②得 $\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}=\frac{t}{2\sqrt{t^2-3t+3}}$.

当 $t>0$ 时,原式 $=\frac{1}{2\sqrt{1-\frac{3}{t}+\frac{3}{t^2}}}$ 有最大值;

当 $t<0$ 时,①式无最小值. 故选 B.

8–3. C 【解析】由题可设 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{c}(\lambda>0)$,由 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{4}$ 可知 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\rangle=\frac{\pi}{4}$,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c})=\sqrt{2}|\lambda\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}|\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=2$,所以 $|\boldsymbol{c}|=\frac{2}{\lambda+1}$. 因为 $\lambda>0$,所以 $\lambda+1>1$,所以 $0<\frac{2}{\lambda+1}<2$,即 $|\boldsymbol{c}|\in(0,2)$.

故选 C.

9–1. $\frac{1}{6}$　$\frac{13}{2}$ 【解析】$\because\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$,$\therefore AD/\!/BC$,$\therefore\angle BAD=180°-\angle B=120°$,

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=\lambda|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot$

$\cos\ 120° = \lambda\times6\times3\times\left(-\frac{1}{2}\right) = -9\lambda = -\frac{3}{2}$,

解得 $\lambda = \frac{1}{6}$.

取 MN 的中点为 O,连接 DO(图略),根据极化恒等式,得 $\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN} = \frac{1}{4}[(2\overrightarrow{DO})^2-(\overrightarrow{MN})^2] = \overrightarrow{DO}^2-\frac{1}{4}$,当 $|\overrightarrow{DO}|$ 取得最小值时,$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的值最小. $\because$ 当 $DO\perp BC$ 时,$|\overrightarrow{DO}|$ 取得最小值,

此时 $|\overrightarrow{DO}| = \frac{3\sqrt{3}}{2}$,

$\therefore\ \overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{DN}$ 的最小值为 $\frac{13}{2}$.

1.5.2 数量积的坐标表示及其计算

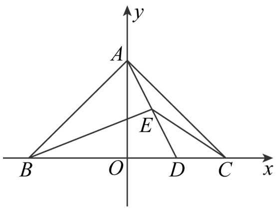
· 易错记 ·

1-1. 直角梯形 【解析】由题可得,$\overrightarrow{AB} = (6,2)$,$\overrightarrow{CD} = (-9,-3)$,$\overrightarrow{AD} = (1,-3)$,$\overrightarrow{BC} = (4,-2)$.

因为 $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$,所以 $AB\parallel CD$,且 $AB\neq CD$. 而 $\overrightarrow{AD}\neq\lambda\overrightarrow{BC}(\lambda\in\mathbf{R})$,所以 AD 与 BC 不平行. 又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$,所以 $AB\perp AD$. 故四边形 $ABCD$ 为直角梯形.

· 题型诀 ·

1-1. A 【解析】设 BC 的中点为 O,连接 AO,以 O 为坐标原点,BC 所在直线为 x 轴,AO 所在直线为 y 轴,建立如图所示的平面直角坐标系.



因为△ABC 是等腰直角三角形,$AB = AC = 1$,

所以 $AO = BO = CO = \frac{1}{2}BC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $\overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{DC}$,

所以 $|OD| = \frac{\sqrt{2}}{4}$,则 $A\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,$B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$,$D\left(\frac{\sqrt{2}}{4},0\right)$,$\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

由 $2\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}$ 可得 E 为线段 AD 的中点,

所以 $E\left(\frac{\sqrt{2}}{8},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，$\overrightarrow{BE}=\left(\frac{5\sqrt{2}}{8},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$，

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BE}=\frac{\sqrt{2}}{4}\times\frac{5\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{16}$.

故选 A.

1-2. D　【解析】在 $y=\tan\left(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{2}\right)$ $(0<x<4)$ 中，令 $y=0$，得 $x=2$，所以点 A 的坐标为 $(2,0)$；令 $y=1$，得 $x=3$，所以点 B 的坐标为 $(3,1)$.

所以 $\overrightarrow{OA}=(2,0)$，$\overrightarrow{OB}=(3,1)$，

所以 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(5,1)$，$\overrightarrow{AB}=(1,1)$，所以 $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\cdot\overrightarrow{AB}=(5,1)\cdot(1,1)=6$. 故选 D.

1-3. 38　【解析】$\boldsymbol{a}\cdot(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=3\boldsymbol{a}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=3\times(9+4)-2\times\left(-\frac{3}{2}+2\right)=38$.

2-1. B　【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(2,0)$，所以 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\lambda(1,2)+(2,0)=(\lambda+2,2\lambda)$. 因为 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，所以 $(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=1\times(\lambda+2)+2\times2\lambda=0$，解得 $\lambda=-\frac{2}{5}$. 故选 B.

2-2. C　【解析】依题意得，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=1\times(-4)+2\times2=0$，所以 $\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$，所以四边形 $ABCD$ 的面积为 $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|=\frac{1}{2}\times\sqrt{5}\times\sqrt{20}=5$. 故选 C.

3-1. C　【解析】由题意得 $m^2=3$，解得 $m=\pm\sqrt{3}$，

又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向共线，故 $m=-\sqrt{3}$，此时 $\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}=(-2\sqrt{3},6)$，

故 $|\boldsymbol{a}-\sqrt{3}\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+6^2}=4\sqrt{3}$.

故选 C.

3-2. B　【解析】由 $|\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}|=10$，得 $\boldsymbol{m}^2+\boldsymbol{n}^2+2\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=100$.

因为 $\boldsymbol{m}=(2,1)$，所以 $|\boldsymbol{m}|=\sqrt{5}$. 又 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=20$，所以 $5+\boldsymbol{n}^2+40=100$，解得 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{55}$.

故选 B.

4-1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　【解析】由题意知 $|\boldsymbol{a}|=1$，$\boldsymbol{c}=(2,2)$，则 $|\boldsymbol{c}|=2\sqrt{2}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0\times2+1\times2=2$，所以 $\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{c}|}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4-2.【解】(1)由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得,$2\times3-1\cdot x=0$,解得 $x=6$,所以 $\boldsymbol{b}=(6,3)$.

由 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{c}$ 得,$2y+1\times2=0$,

解得 $y=-1$,所以 $\boldsymbol{c}=(-1,2)$.

(2)由(1)得 $\boldsymbol{m}=2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=2(2,1)-(6,3)=(-2,-1)$,

$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=(2,1)+(-1,2)=(1,3)$,

所以 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=(-2)\times1+(-1)\times3=-5$,

$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$,

$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$,

$\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{-5}{\sqrt{5}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 $\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle\in[0,\pi]$,

所以向量 $\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$ 的夹角为 $\dfrac{3\pi}{4}$.

5-1. D　【解析】因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(t-2,-3)$,又 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,所以 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})<0$ 且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不共线.

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 共线时,$-6t-2(t-2)=0$,解得 $t=\dfrac{1}{2}$,所以 $t^2-2t-3<0$ 且 $t\neq\dfrac{1}{2}$,

所以 $t\in\left(-1,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2},3\right)$,故选 D.

5-2. $\left(-9,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

【解析】因为 $\boldsymbol{a}=(2,1)$,$\boldsymbol{b}=(4,-3)$,所以 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(-6,7)$,$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(2\lambda+4,\lambda-3)$.

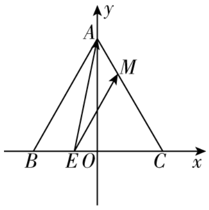
因为 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的夹角为钝角,

所以$(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})<0$,即 $-6(2\lambda+4)+7(\lambda-3)<0$,解得 $\lambda>-9$.

且 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 不共线,所以 $-6(\lambda-3)\neq7(2\lambda+4)$,解得 $\lambda\neq-\dfrac{1}{2}$.

综上,$\lambda>-9$ 且 $\lambda\neq-\dfrac{1}{2}$,所以 λ 的取值范围为$\left(-9,-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2},+\infty\right)$.

6-1. A　【解析】以线段 BC 的中点 O 为坐标原点,BC,OA 所在直线分别为 x 轴、y 轴建立如图所示的平面直角坐标系.



设 $E(a,0)$，则 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，$A(0,3)$，$C(\sqrt{3},0)$.

由 $3\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}$ 得 $M\left(\frac{\sqrt{3}}{3},2\right)$，$\overrightarrow{EA}=(-a,3)$，$\overrightarrow{EM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-a,2\right)$，

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA}=-a\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-a\right)+6=\left(a-\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\frac{71}{12}$.

因为 $-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，

所以当 $a=\frac{\sqrt{3}}{6}$ 时，$(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA})_{\min}=\frac{71}{12}$；当 $a=-\sqrt{3}$ 时，$(\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA})_{\max}=10$.

所以 $\overrightarrow{EM}\cdot\overrightarrow{EA}\in\left[\frac{71}{12},10\right]$. 故选 A.

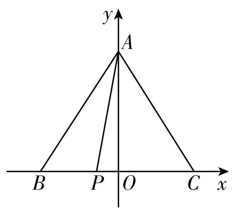
6-2. -1 【解析】如图，以 BC 的中点 O 为坐标原点，建立平面直角坐标系，

则 $B(-2,0)$，$C(2,0)$，设 $A(0,m)(m>0)$，$P(x,0)(-2\leqslant x\leqslant 2)$，

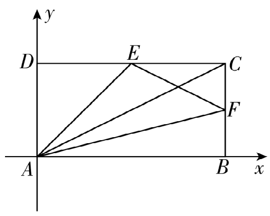
则 $\overrightarrow{PA}=(-x,m)$，$\overrightarrow{PB}=(-2-x,0)$，

所以 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=-x(-2-x)=x^2+2x=(x+1)^2-1$，

因为 $-2\leqslant x\leqslant 2$，所以当 $x=-1$ 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$ 取得最小值，$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB})_{\min}=-1$.



6-3.【解】(1) 如图，以 A 为坐标原点建立平面直角坐标系，得 $E(1,1)$，$F\left(2,\frac{1}{2}\right)$，$C(2,1)$，$B(2,0)$，所以 $\overrightarrow{EF}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{AC}=(2,1)$，所以 $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}$.



(2) 设 $N(x,y)$，由 (1) 得 $\overrightarrow{EN}=\lambda\overrightarrow{EF}=\lambda\left(1,-\frac{1}{2}\right)=\left(\lambda,-\frac{1}{2}\lambda\right)=(x-1,$

$y-1),0\leqslant\lambda\leqslant1$,

所以 $N\left(1+\lambda,1-\frac{1}{2}\lambda\right),0\leqslant\lambda\leqslant1$,

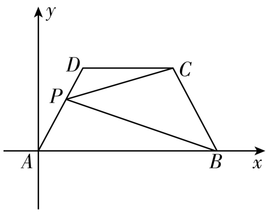
所以 $\overrightarrow{AN}=\left(\lambda+1,-\frac{1}{2}\lambda+1\right)$,

$\overrightarrow{NB}=\left(-\lambda+1,\frac{1}{2}\lambda-1\right)$,

所以 $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{NB}=(\lambda+1)(-\lambda+1)+\left(-\frac{1}{2}\lambda+1\right)\left(\frac{1}{2}\lambda-1\right)=-\frac{5}{4}\lambda^2+\lambda=-\frac{5}{4}\left(\lambda-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{5}$,

当 $\lambda=\frac{2}{5}$时,$\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{NB}$ 有最大值$\frac{1}{5}$.

7-1. C 【解析】如图,以 A 为坐标原点,AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系,则由题意可得 $B(2,0)$,$C\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



设 $P(a,\sqrt{3}a)$,$0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$,则 $\overrightarrow{PB}=(2-a,-\sqrt{3}a)$,$\overrightarrow{PC}=\left(\frac{3}{2}-a,\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}a\right)$,

所以 $2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}=\left(\frac{5}{2}-a,-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}a\right)$,

所以$|2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|$

$=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-a\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}a\right)^2}$

$=\sqrt{4a^2-2a+7}$

$=\sqrt{4\left(a-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{27}{4}}$,

所以当 $a=\frac{1}{4}$时,$|2\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}|$取最小值$\frac{3\sqrt{3}}{2}$. 故选 C.

7-2. $\sqrt{2}$ 【解析】设 $\boldsymbol{m}=(1,0)$,$\boldsymbol{n}=(x,y)$.

因为$|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}|=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}$,所以 $\sqrt{(x-1)^2+y^2}=x$,化简得 $y^2=2x-1$,$x\geqslant\frac{1}{2}$,所以 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x-1}}=$

$\sqrt{\frac{x^2}{x^2+2x-1}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}}$.

设 $t=\frac{1}{x}$，即 $0<t\leqslant 2$，则 $\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\sqrt{\frac{1}{1+2t-t^2}}=\sqrt{\frac{1}{-(t-1)^2+2}}$，当 $t=1$，即 $x=1$ 时，$\cos\langle \boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle$ 取得最小值，此时向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 的夹角最大，

所以 $y=\pm1$，所以 $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{2}$.

7-3.【解】(1) 由已知得 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3k,2k)+(-2,1)=(3k-2,2k+1)$，

$\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}=(3,2)+(4,-2)=(7,0)$.

因为 $k\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 垂直，

所以 $7\times(3k-2)=0$，解得 $k=\frac{2}{3}$.

(2) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}+x\boldsymbol{a}=(-2,1)+(3x,2x)=(3x-2,2x+1)$，

所以 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{(3x-2)^2+(2x+1)^2}=\sqrt{13x^2-8x+5}=\sqrt{13\left(x-\frac{4}{13}\right)^2+\frac{49}{13}}$，

所以当 $x=\frac{4}{13}$ 时，$|\boldsymbol{c}|$ 取得最小值 $\frac{7\sqrt{13}}{13}$，

此时 $\boldsymbol{c}=\left(-\frac{14}{13},\frac{21}{13}\right)$.

所以 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\left(-\frac{14}{13}\right)\times(-2)+\frac{21}{13}\times1=\frac{49}{13}$.

1.6 解三角形

1.6.1 余弦定理

· 题型诀 ·

1-1. C【解析】因为 $a=3$，$b=\sqrt{13}$，$c=4$，所以由余弦定理的推论得，

$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{9+16-13}{2\times3\times4}=\frac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，故选 C.

1-2. B【解析】设 A 为 $\triangle ABC$ 的最小角，C 为 $\triangle ABC$ 的最大角，

由余弦定理的推论，可得 $\cos B=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}=\frac{1}{2}$.

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{\pi}{3}$，所以 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，即最大角和最小角之和是 $\frac{2}{3}\pi$. 故

选 B.

2-1. B 【解析】在 $\triangle ABC$ 中，$b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45°$，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$ 得 $a^2-\sqrt{2}a-1=0$，解得 $a=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$（负值舍去）. 故选 B.

2-2. 【解】由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B$，即 $7^2=8^2+c^2-2\times8c\cdot\cos 60°$，整理得 $c^2-8c+15=0$，解得 $c=3$ 或 $c=5$，均符合题意.

3-1. A 【解析】由余弦定理可得 $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=(\sqrt{3})^2+(\sqrt{6})^2-2\times\sqrt{3}\times\sqrt{6}\times\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)=12$，所以 $c=2\sqrt{3}$，故选 A.

3-2. C 【解析】若 $A=120°$，$c=2b$，

由余弦定理的推论可得，$\cos 120°=-\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2+4b^2-a^2}{4b^2}$，所以 $a=\sqrt{7}b$，

则 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{7b^2+b^2-4b^2}{2\sqrt{7}b^2}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$.

故选 C.

4-1. C 【解析】把 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，代入已知等式得 $b=c\cdot\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，整理得 $a^2+b^2=c^2$，则 C 为直角. 故 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形.

4-2. AC 【解析】对于 A 选项，由余弦定理的推论可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\geqslant\dfrac{2ab-c^2}{2ab}=1-\dfrac{c^2}{2ab}>1-\dfrac{ab}{2ab}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，因为 $0<C<\pi$，所以 $0<C<\dfrac{\pi}{3}$，A 选项正确；对于 B 选项，因为 $a+b>2c$，则 $(a+b)^2>4c^2$，所以 $c^2<\dfrac{(a+b)^2}{4}$，由余弦定理的推论可得 $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}>\dfrac{a^2+b^2-\dfrac{(a+b)^2}{4}}{2ab}=\dfrac{3(a^2+b^2)-2ab}{8ab}\geqslant\dfrac{6ab-2ab}{8ab}=\dfrac{1}{2}$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立，因为 $0<C<\pi$，所以 $0<C<\dfrac{\pi}{3}$，B 选项错

误;对于 C 选项,假设 $C\geqslant\frac{\pi}{2}$,则 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\leqslant0$,即 $a^2+b^2-c^2\leqslant0$,所以 $c^2\geqslant a^2+b^2$①,故 $c>a,c>b$,对①式两边同时乘 c,得 $c^3\geqslant ca^2+cb^2>a^3+b^3$,与 $a^3+b^3=c^3$ 矛盾,所以假设不成立,即 $0<C<\frac{\pi}{2}$成立,故 C 选项正确;对于 D 选项,取 $a=b=2,c=1$,满足 $(a^2+b^2)c^2<2a^2b^2$,且 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{7}{8}>\frac{1}{2}$,则 $0<C<\frac{\pi}{3}$,故 D 选项错误. 故选 AC.

5–1. D 【解析】因为 $\boldsymbol{p}=(a+c,-b)$,$\boldsymbol{q}=(a+b,a-c)$,$\boldsymbol{p}/\!/\boldsymbol{q}$,

所以 $(a+c)\cdot(a-c)-(-b)\cdot(a+b)=0$,

即 $-ab=a^2+b^2-c^2$,

由余弦定理的推论可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{-ab}{2ab}=-\frac{1}{2}$.

因为 $C\in(0,\pi)$,所以 $C=\frac{2\pi}{3}$.

6–1. B 【解析】$\because a:b:c=3:5:7$,

设 $a=3x,b=5x,c=7x,x>0$,

$\therefore c$ 最大,即 C 最大,$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{9x^2+25x^2-49x^2}{30x^2}=-\frac{1}{2}$,

又 $0°<C<180°$,$\therefore C=120°$. 故选 B.

1.6.2 正弦定理

· 易错记 ·

1–1. C 【解析】由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得 $\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $a<b$,所以 $A<B$,所以 A 为锐角,所以 $A=\frac{\pi}{4}$. 故选 C.

· 题型诀 ·

1–1. D 【解析】因为 $b=2,B=120°,C=45°$,所以由正弦定理得$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

则 $c=\frac{2\sin C}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$. 故选 D.

1–2. C 【解析】因为 $C=180°-30°-$

$15°=135°$,所以 $\sin C=\sin 135°=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由正弦定理得 $a=\dfrac{c\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

故选 C.

2-1. D　【解析】因为 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$,所以 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 又因为 $a>c$,即 $A>C$,所以 $A=45°$或 $135°$,故选 D.

2-2.【解】因为 $\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$,

所以 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{1\times\sin 60°}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$.

因为 $b>c$, $B=60°$,所以 $C<60°$,所以 $C=30°$,所以 $A=90°$.

由勾股定理得 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$.

则 $a=2$, $A=90°$, $C=30°$.

3-1. BC　【解析】对于 A,因为 $a<b$,所以 $A<B$. 因为 $A=150°$,所以 $150°<B$,所以这样的三角形不存在,即$\triangle ABC$ 无解,所以 A 错误.

对于 B,由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,即 $\dfrac{1}{\sin 30°}=\dfrac{4}{\sin B}$,得 $\sin B=2>1$,无解,所以 B 正确.

对于 C,由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$,即 $\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 45°}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$,得 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 因为 $0°<B<135°$,所以 $B=60°$或 $B=120°$,所以$\triangle ABC$ 有两解,所以 C 正确.

对于 D,因为 $A=60°$, $a=b=2$,所以$\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形,所以$\triangle ABC$ 有一解,所以 D 错误.

故选 BC.

3-2. C　【解析】由题意得,点 C 到边 AB 的距离 $d=b\sin A=3$,所以当 $3<a<2\sqrt{3}$时,符合条件的三角形有两个,故选 C.

4-1. C　【解析】由余弦定理的推论得

$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{bc}{2bc}=\dfrac{1}{2}$,

又 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.

由 $\sin B\sin C=\sin^2 A$,可得 $a^2=bc$,代入 $b^2+c^2=a^2+bc$,

则有 $(b-c)^2=0$,所以 $b=c$,

又 $A=\frac{\pi}{3}$,所以 $\triangle ABC$ 的形状是等边三角形,故选 C.

4-2. B 【解析】由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\sin C}{\cos C}$,则 $\tan A=\tan B=\tan C$. 又 A,B,C 为三角形内角,则 $A=B=C$,则 $\triangle ABC$ 是等边三角形. 故选 B.

5-1. B 【解析】由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos 30°=3+4-2\times\sqrt{3}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$,所以 $a=1$.

由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$,

所以 $\frac{a+b+c}{\sin A+\sin B+\sin C}=\frac{a}{\sin A}=\frac{1}{\sin 30°}=2$,

所以 $\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{a+b+c}=\frac{1}{2}$. 故选 B.

5-2. C 【解析】在 $\triangle ABC$ 中,因为 $\sin A:\sin B:\sin C=3:5:7$,

由正弦定理,可设 $\triangle ABC$ 的三边分别为 $a=3m,b=5m,c=7m(m>0)$.

因为 $c>a,c>b$,所以 C 为 $\triangle ABC$ 的最大角.

由余弦定理的推论可得 $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(3m)^2+(5m)^2-(7m)^2}{2\times 3m\times 5m}=-\frac{1}{2}$,

所以 $C=120°$. 故选 C.

5-3. 【解】若选条件①,在 $\triangle ABC$ 中,由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$,得 $a^2+a-12=0$,所以 $a=3$ 或 $a=-4$(舍).

在 $\triangle ABC$ 中,由正弦定理 $\frac{b}{\sin\angle ABC}=\frac{a}{\sin A}$,

得 $\sin A=\frac{a\sin\angle ABC}{b}=\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

因为 $BD=AB=1$,所以 $\angle ADB=A$,

所以 $\sin\angle ADB=\frac{3\sqrt{39}}{26}$.

若选条件②，在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\angle ABC$，得 $a^2+a-12=0$，所以 $a=3$ 或 $a=-4$（舍）.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理的推论得 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

因为 $\angle ABC=\dfrac{2\pi}{3}$，$\angle CBD=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $\angle ABD=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\sin\angle ADB=\cos A$，

所以 $\sin\angle ADB=\dfrac{5\sqrt{13}}{26}$.

6-1. C 【解析】由余弦定理可得 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$，即 $3AC^2-4AC-15=0$，解得 $AC=3$ 或 $AC=-\dfrac{5}{3}$（舍）. 因为 $\cos A=\dfrac{1}{3}$，A 为锐角，所以 $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，因此 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=2\sqrt{2}$. 故选 C.

6-2. C 【解析】由题意知 $\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(c^2-a^2-b^2)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}ab\cos C$，

即 $\tan C=-\sqrt{3}$，

又 $0<C<\pi$，故 $C=\dfrac{2\pi}{3}$.

由正弦定理知 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，可得 $\sin A=\dfrac{a\sin C}{c}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $0<A<\dfrac{\pi}{3}$，所以 $A=\dfrac{\pi}{4}$. 故选 C.

1.6.3 解三角形应用举例

· 题型诀 ·

1-1. B 【解析】由题意知，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=180°-75°+15°=120°$，$AB=100$，$BC=60$，根据余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC=100^2+60^2+6\ 000=19\ 600$，所以 $AC=140$. 故选 B.

1-2. $100\sqrt{2}$ 【解析】在 $\mathrm{Rt}\triangle ACM$ 中，$\angle MAC=60°$，$AC=100$，所以 $AM=$

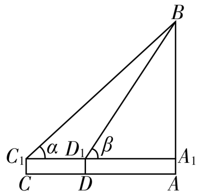
$\frac{AC}{\cos 60°}=\frac{100}{\frac{1}{2}}=200$. 在 Rt $\triangle ABN$ 中，$\angle NAB=30°$，$AB=50\sqrt{6}$，所以 $AN=\frac{AB}{\cos 30°}=\frac{50\sqrt{6}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=100\sqrt{2}$. 在 $\triangle AMN$ 中，$\angle MAN=45°$，$AM=200$，$AN=100\sqrt{2}$，由余弦定理，得 $MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos 45°=200^2+100^2\times 2-2\times 200\times 100\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=100^2\times 2$，所以 $MN=100\sqrt{2}$.

2-1. D 【解析】如图，在 $\triangle BC_1D_1$ 中，$\angle C_1BD_1=\beta-\alpha$，由正弦定理可得 $\frac{C_1D_1}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{BD_1}{\sin\alpha}$，

所以 $BD_1=\frac{C_1D_1\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{l\sin\alpha}{\sin(\beta-\alpha)}$，

从而 $BA_1=BD_1\sin\beta=\frac{l\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$，

故 $AB=BA_1+AA_1=\frac{l\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}+h$，故选 D.

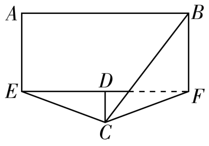


2-2. $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ 【解析】如图，C 是阅兵舰，A，B 分别是歼-15 舰载飞机被第一次和第二次观察的位置，E，F 是飞机在地面上的投影.

由已知得 $AB=300\sqrt{2}\times\frac{1}{60}=5\sqrt{2}$，$EF=AB=5\sqrt{2}$，$CD$ 是正北方向，因此 $\angle DCE=\frac{\pi}{3}$，$\angle DCF=\frac{5\pi}{12}$，$\angle FCB=\frac{\pi}{6}$，$\angle ECF=\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$，$\angle CEF=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$.

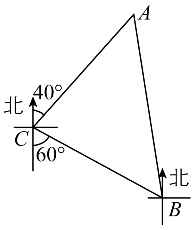
在 $\triangle ECF$ 中，由正弦定理可得 $\frac{EF}{\sin\angle ECF}=\frac{CF}{\sin\angle CEF}$，即 $\frac{5\sqrt{2}}{\sin\frac{3\pi}{4}}=\frac{CF}{\sin\frac{\pi}{6}}$，解得 $CF=5$.

在 Rt $\triangle BFC$ 中，$BF=CF\tan\angle BCF=5\tan\frac{\pi}{6}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.



3-1. B 【解析】如图,由题意,在$\triangle ABC$中,$AC=BC$,$\angle ACB=180°-40°-60°=80°$,所以$\angle ABC=\frac{1}{2}(180°-80°)=50°$.

又$60°-50°=10°$,所以A在B的北偏西$10°$方向.故选B.



3-2. C 【解析】据题意知,在$\triangle ABC$中(图略),$\angle ABC=60°$,$AB=8$,$BC=16$,所以$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\angle ABC=192$,所以$AC=8\sqrt{3}$.

又$\sin\angle CAB=\frac{BC\cdot\sin\angle ABC}{AC}=1$,

所以$\angle CAB=90°$,所以航行的方向和路程分别为北偏东$70°$,$8\sqrt{3}$海里.

故选C.

3-3. 北偏东$30°$ $\sqrt{3}a$ 【解析】如图所示,设甲船在C处追上乙船,乙船到C处用的时间为t,乙船的速度为v,则$BC=tv$,$AC=\sqrt{3}tv$.又$B=120°$,则由正弦定理得$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin B}$,即$\frac{1}{\sin\angle CAB}=\frac{\sqrt{3}}{\sin 120°}$,所以$\sin\angle CAB=\frac{1}{2}$.

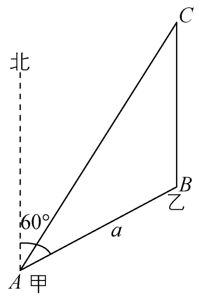
因为$0°<\angle CAB<60°$,

所以$\angle CAB=30°$,所以$60°-\angle CAB=60°-30°=30°$,即甲船应沿北偏东$30°$方向直线行驶.

又$\angle ACB=180°-120°-30°=30°$,

所以$BC=AB=a$,

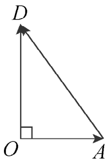
所以$AC=\sqrt{3}a$,即追上时甲船行驶了$\sqrt{3}a$ n mile.



1.7　平面向量的应用举例

·易错记·

1-1.【解】如图,设此人的实际前进速度为 $\overrightarrow{OD}$,水流速度为 $\overrightarrow{OA}$,则此人的游速为 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}$.



在Rt△AOD 中,$|\overrightarrow{AD}|=2\sqrt{3}$,$|\overrightarrow{OA}|=2$,则 $|\overrightarrow{OD}|=2\sqrt{2}$,$\sin\angle DAO=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 故此人沿向量 $\overrightarrow{AD}$ 的方向游$\left(\text{即逆着水流且与河岸所成夹角的正弦值为}\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$,才能沿与水流垂直的方向前进,实际前进的速度大小为 $2\sqrt{2}$ km/h.

·题型诀·

1-1.【证明】设 $\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$,则 $\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\boldsymbol{a}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$,

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{4}\boldsymbol{b}-\frac{3}{4}\boldsymbol{a}$,所以 $\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{FB}$. 又因为 D,E,F,B 四点不共线,所以四边形 $DEBF$ 是平行四边形.

2-1.【证明】因为 $AB=AC$,D 是 BC 的中点,所以 $AD\perp BC$,所以 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$,所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

又因为点 D 在 BC 上,所以 $\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BD}$,所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

又因为 $DE\perp AC$,所以 $\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{AC}$,所以 $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

又因为点 E 在 AC 上,所以 $\overrightarrow{AE}\perp\overrightarrow{DE}$,所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}=0$.

因为 F 是 DE 的中点,所以 $\overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$.

则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BE}=(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF})\cdot(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE})$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{DE}$

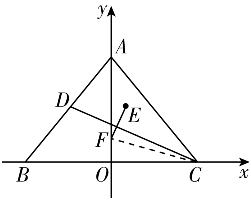
$=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DE}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DE})=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EC}=0.$

所以 $\overrightarrow{AF}\perp\overrightarrow{BE}$,所以 $AF\perp BE$.

2-2. (1)【解】设 $a>0,b>0$,则△ABC 在平面直角坐标系中的位置如图.

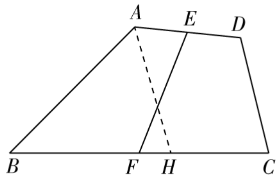


因为 $A(0,b)$,$B(-a,0)$,$C(a,0)$,所以 $D\left(-\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$,则由重心坐标公式,得 $E\left(\frac{a}{6},\frac{b}{2}\right)$.

(2)【证明】由(1)可得 $\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{3a}{2},\frac{b}{2}\right)$.

易知△ABC 的外心 F 在 y 轴上,可设为 $(0,y)$,连接 CF. 由 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{CF}|$,得 $(y-b)^2=(-a)^2+y^2$,解得 $y=\frac{b^2-a^2}{2b}$,则 $F\left(0,\frac{b^2-a^2}{2b}\right)$,所以 $\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{a}{6},-\frac{a^2}{2b}\right)$,所以 $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{3a}{2}\right)\times\left(-\frac{a}{6}\right)+\frac{b}{2}\times\left(-\frac{a^2}{2b}\right)=0$,所以 $\overrightarrow{CD}\perp\overrightarrow{EF}$,即 $CD\perp EF$.

3-1. $\frac{\sqrt{19}}{2}$ 【解析】如图,作 $AH/\!/CD$,交 BC 于点 H,则∠BHA=∠BCD=75°,所以∠BAH=180°−45°−75°=60°,则 $\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AH}\rangle=\cos\angle BAH=\frac{1}{2}$.



因为 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}$,$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}$,

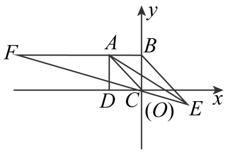
又 $\overrightarrow{EA}=-\overrightarrow{ED}$,$\overrightarrow{BF}=-\overrightarrow{CF}$,

所以 $2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$,

所以 $|\overrightarrow{EF}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{1}{4}|\overrightarrow{DC}|^2+\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\rangle=\frac{9}{4}+1+\frac{3}{2}=\frac{19}{4}$，所以 $|\overrightarrow{EF}|=\frac{\sqrt{19}}{2}$.

3-2.【证明】以 C 为坐标原点，建立如图所示的平面直角坐标系. 设正方形的边长为 1，则点 A,B 的坐标分别为 $(-1,1)$ 和 $(0,1)$. 设点 E 的坐标为 (x,y) $(x>0,y<0)$，则 $\overrightarrow{BE}=(x,y-1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,-1)$.



因为 $\overrightarrow{BE}/\!/\overrightarrow{AC}$，所以 $x\times(-1)-1\times(y-1)=0$. ①

又由 $AC=CE$ 及 $A(-1,1)$，$C(0,0)$，$E(x,y)$，

可得 $x^2+y^2=2$. ②

由①②可得 $E\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

设 $F(x_1,1)$，则由 $\overrightarrow{CF}=(x_1,1)$ 和 $\overrightarrow{CE}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ 共线得，$\frac{1-\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1+\sqrt{3}}{2}=0$，解得 $x_1=-2-\sqrt{3}$，所以点 F 的坐标为 $(-2-\sqrt{3},1)$. 因为 $\overrightarrow{AF}=(-1-\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{AE}=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$，所以 $|\overrightarrow{AF}|=|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}+1$，所以 $AF=AE$.

4-1. A　【解析】因为 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2+\boldsymbol{F}_3=\boldsymbol{0}$，

所以 $\boldsymbol{F}_3=-\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2$，

所以 $|\boldsymbol{F}_3|=|-\boldsymbol{F}_1-\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{(\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2)^2}=\sqrt{|\boldsymbol{F}_1|^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2+|\boldsymbol{F}_2|^2}=\sqrt{4+2\times2\times4\cos60^\circ+16}=2\sqrt{7}$ (N).

4-2. B　【解析】根据题意可得 $-\boldsymbol{G}=\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2$，

则 $|\boldsymbol{G}|=|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|=\sqrt{|\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2|^2}$

$=\sqrt{\boldsymbol{F}_1^2+\boldsymbol{F}_2^2+2\boldsymbol{F}_1\cdot\boldsymbol{F}_2}$

$=\sqrt{2\boldsymbol{F}_1^2+2\boldsymbol{F}_1^2\cdot\cos\theta}$，

当 $\theta=0$ 时，$|\boldsymbol{G}|=2|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_1|+|\boldsymbol{F}_2|$，

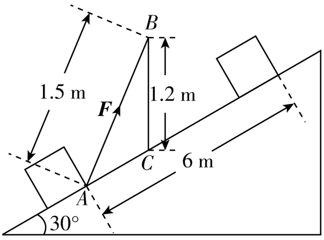
当 $\theta\neq0$ 时，$|\boldsymbol{G}|\neq|\boldsymbol{F}_1|+|\boldsymbol{F}_2|$，故 A 错误；

当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，$|\boldsymbol{G}|=\sqrt{2F_1^2+2F_1^2\cdot\cos\theta}=\sqrt{2}|\boldsymbol{F}_1|$，即 $|\boldsymbol{F}_1|=\frac{\sqrt{2}}{2}|\boldsymbol{G}|$，故 B 正确；

$|\boldsymbol{G}|=\sqrt{2F_1^2+2F_1^2\cdot\cos\theta}$，因为 $y=\cos\theta$ 在 $(0,\pi)$ 上单调递减，又行李包的重力 $\boldsymbol{G}$ 不变，所以当 θ 角越大时，用力越大，故 C 错误；

当 $|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{G}|$，即 $|\boldsymbol{G}|=\sqrt{2F_1^2+2F_1^2\cdot\cos\theta}=|\boldsymbol{F}_1|$ 时，解得 $\cos\theta=-\frac{1}{2}$，又 $\theta\in(0,\pi)$，所以 $\theta=\frac{2\pi}{3}$，故 D错误. 故选 B.

5-1. B 【解析】如图，在△ABC 中，由正弦定理，得 $\frac{AB}{\sin 120°}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}$，所以 $\sin\angle BAC=\frac{6}{5\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$，所以 $\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{13}}{5}$，所以 $W=\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{s}=25\times6\times\cos\angle BAC=30\sqrt{13}$ (J). 故选 B.



6-1. 【解】(1) 由题设，$\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 反方向上的分速度大小为 $|\boldsymbol{v}_1|\cos 60°=5$ km/h$>|\boldsymbol{v}_2|=4$ km/h，

所以游船航行到达北岸的位置是在 A' 的西侧.

(2) 要使游船能到达 A' 处，则 $\boldsymbol{v}_1$ 在 $\boldsymbol{v}_2$ 反方向上的分速度大小为 $|\boldsymbol{v}_1|\cos(180°-\theta)=|\boldsymbol{v}_2|=4$ km/h，

所以 $\cos(\pi-\theta)=\frac{2}{5}$，故 $\cos\theta=-\frac{2}{5}$. 又 $0°<\theta<180°$，此时 $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{21}}{5}$，

所以 $\boldsymbol{v}_1$ 在南北方向上的速度大小为 $|\boldsymbol{v}_1|\sin\theta=2\sqrt{21}$ km/h，

所以航行时间 $t=\frac{d}{2\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{42}$ (h).

(3) 由 (1) 知游船的航行时间为 $\frac{d}{|\boldsymbol{v}_1|\sin 60°}=\frac{\sqrt{3}}{15}$ (h)，

所以东西方向航行距离为$\left(|\boldsymbol{v}_1|\cos 60^\circ-|\boldsymbol{v}_2|\right)\times\frac{\sqrt{3}}{15}=\frac{\sqrt{3}}{15}$(km),

所以游船航行到达北岸的实际航程为$\sqrt{1^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{15}\right)^2}=\frac{2\sqrt{57}}{15}$(km).